Fourierreihen und Randwertprobleme

Vorlesung: Prof. Hieber Skript: F. Greil & F. Schäfer

18. Juli 2002

Dieses Kurzskript basiert auf der Vorlesung *Fourierreihen und Randwertprobleme*, gehalten von Prof. Dr. M. Hieber (AG Angewandte Analysis) an der TU Darmstadt im Sommersemester 2002. Es wurde von Florian Greil `<florian.greil@physik.tu-darmstadt.de>` und Florian Schäfer `<florian@netego.de>` erstellt. Obwohl wir bemüht waren Fehler zu vermeiden, können wir natürlich keinerlei Garantie übernehmen. Sachdienliche Hinweise, die zur Ergreifung von flüchtigen Fehlern führen, werden aber auf Wunsch vertraulich behandelt.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Laplace-Gleichung

1.1 Definition: harmonisch

Eine C^2-Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Delta u = 0$ heißt *harmonisch*.

Notation: gemittelte Integrale mit ω_n als Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
⨍_{B(x,r)} f(y)\,dy &:= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y \\
⨍_{B(x,r)} f(y)\,dS &:= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

1.2 Satz: Mittelwerteigenschaft für Laplace-Gleichung

Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Daraus folgt:

$$u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}S = ⨍_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}y \quad \forall B(x,r) \subset \Omega$$

1.3 Satz: Umkehrung zur Mittelwerteigenschaft

Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $u(x) = ⨍_{\partial B(x,r)} u\,\mathrm{d}S\ \forall B(x,r) \subset \Omega \Rightarrow u$ ist harmonisch.

1.4 Satz: Maximumsprinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sei harmonisch auf Ω. Dann folgt:

1. $\max_\Omega u = \max_{\partial\overline{\Omega}} u$
2. Falls Ω zusammenhängend und $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \Rightarrow u \equiv \text{const}$.

1.5 Korollar: Eindeutigkeit der Lösung

Sei Ω zusammenhängend, dann ex. höchstens eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig.

2 Distributionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Setze $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ (d.h. beliebig oft stetig differenzierbar mit kompaktem Träger) als Raum der *Testfunktionen*.

2.1 Definition: Konvergenz

Sei $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Wir sagen $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$:$\Leftrightarrow$

1. $\exists K \subset \Omega$ kompakt mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n\to\infty} \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi\|_\infty = 0\ \forall \alpha$

2.2 Definition: Schwartz

Wir setzen $\mathcal{D}'(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, T \text{ linear und stetig}\}$. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißen *Distributionen*. Hierbei bedeutet $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ stetig: $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ in $\mathbb{C}$.

2.3 Satz: Äquivalenz zur Distribution

Für $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear sind äquivalent:

1. T ist Distribution
2. $\forall K \subset \Omega\,\text{kp.}\ \exists c > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0 : |T(\varphi)| \le c \sum_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$

Notation: $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$

2.4 Beispiele: Distributionen von Dirac und Cauchy

1. *Dirac-Distribution*: $\delta_a, a \in \Omega$, $\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann ist $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$
2. *Cauchy-Hauptwert*: $\Omega = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}$ ex. nicht $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir def. $\langle \mathrm{pv}\frac{1}{x}, \varphi \rangle := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pv heißt Cauchy Hauptwert.

2.5 Beispiel: T_f Distribution

Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann def. $\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x$ eine Distribution T_f auf $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.6 Satz: Fundamentallemma der Variationsrechnung

Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt $T_f = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow f = 0$ fast überall.

2.7 Definition: Konvergenz von Distributionen

Seien $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann konv. $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'(\Omega) :\Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2.8 Beispiel: Konvergenz

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}), \|f\|_\infty = 1, f \geq 0$. Setze $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{1}{x}\right), \epsilon > 0$. Dann: $T_{f_\epsilon} \to \delta_0$.
Beispiel: *Gauß-Kern*: $k(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

2.9 Multiplikation mit einer Funktion

Sei $a \in C^\infty(\Omega), T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Setze $\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Beispiel: $a\delta = a(0)\delta$, denn $\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\langle \delta, \varphi \rangle$

2.10 Ableitung einer Distribution

$D^\alpha T$ wird definiert via $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2.11 Beispiel: Ableitung der Heavyside-Funktion

Die *Heavyside-Funktion* $H(x) := \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$. Dann ist $H \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$, also $H' = \delta$.

2.12 Der adjungierte Operator

Sei $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konst. $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\langle AT, \varphi \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha T, \varphi \rangle \overset{2.10}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle T, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi \rangle =: \langle T, A^* \varphi \rangle$$

mit $A^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ als *Adjungierte zu A*, also $\langle AT, \varphi \rangle = \langle T, A^* \varphi \rangle$.

2.13 Translation

Für $a \in \mathbb{R}^n, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ setze $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x - a)$. Translation von T def. via $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_a \varphi \rangle$

2.14 Spiegelung

Für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ setze $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

2.15 Faltung

Sei $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Setze $h(y) := f(y)g(x-y), x \in \mathbb{R}^n$

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \langle T_f, \tilde{\tau}_x g\rangle$$

2.16 Definition: Faltung einer Distribution

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $(T * \varphi)(x) := \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi\rangle$ mit $x \in \mathbb{R}^n$.
Beispiel: $(\delta * \varphi)(x) = \langle \delta, \tilde{\tau}_x \varphi\rangle = (\tilde{\tau}_x)\varphi(0) = \varphi(x)$, d.h. δ ist Identität bzgl. Faltung.

2.17 Ableitung von $T * \varphi$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ insbesondere $\partial_j(T * \varphi) = T * (\partial_j \varphi) = (\partial_j T) * \varphi$

2.18 Theorem: Lösung von $Au = f$

Sei $A = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konst. Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$. Dann ist für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $u := T * f$ eine Lösung von $Au = f$ (im Sinne von Distributionen).

2.19 Definition: Fundamentallösung

Sei $A = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit konst. Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $AT = \delta$. Dann heißt T *Fundamentallösung von A in $\mathbb{R}^n$*.

3 Fundamentallösungen

3.1 Theorem: Fundamentallösung für Δ

Für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit dem Oberflächenmaß ω_n der $(n-1)$-dim. Einheitssphäre S^{n-1} setze

$$\Phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2-n} \cdot \frac{1}{\omega_n} |x|^{2-n} & \text{für } n \ge 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{2}|x| & \text{für } n = 1 \end{cases}$$

Dann ist $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta\Phi = \delta$

3.2 Korollar: Laplace-Gleichung

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u := \Phi * f$ eine Lsg. der Gleichung $\Delta u = f$ (im Sinne von Distributionen).

3.3 Helmholtz-Gleichung

Für $k \in \mathbb{R}$ setzte $V(x) := -\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(k|x|)}{|x|}$ mit $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Dann gilt: $(\Delta + k^2)V = \delta$.

4 Fouriertransformation

4.1 Definition: Schnell fallende Funktionen

Der Raum $S(\mathbb{R}^n)$ der *schnell fallenden Funktionen* ist definiert durch durch

$$S(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}), \|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \ \forall \alpha, \beta\}$$

4.2 Definition: Fouriertransformation (FT)

Sei $u \in S$. Die *Fouriertransformierte* $\hat{u}$ von u ist definiert als

$$\hat{u}(\xi) := \mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle} u(x)\,\mathrm{d}x \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

4.3 Satz: Eigenschaften der FT

1. Die Fouriertransformation ist eine lineare, stetige Abbildung von S nach S.
2. $(D^\alpha u)\hat{}(\xi) = (i\xi)^{|\alpha|}\hat{u}(\xi)$
3. $((-ix)^{|\alpha|}u)\hat{}(\xi) = D^\alpha \hat{u}(\xi)$

Zusatz: (f_j) konvergiert gegen f in $S :\Leftrightarrow \|f_n - f\|_m := \sup_{\alpha \leq m \;\; |\beta| \leq m} \|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

4.4 Beispiel: FT

Sei $f(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)$. M.a.W. $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ ist Eigenwert zum Eigenvektor f der Fouriertransformation.

4.5 Rechenregeln

Sei $f, g \in S$, sowie $(\tau_y f)(x) := f(x-y)$ (Translation), $(m_y f)(x) := e^{i\langle x,y\rangle} f(x)$ (Multiplikation), $d_a f(x) := f(ax)$ (Ditalation), dann gilt:

1. $(\tau_y f)\hat{}(\xi) = m_{-y}\hat{f}(\xi)$
2. $(m_y f)\hat{}(\xi) = (\tau_y \hat{f})(\xi)$
3. $(d_a f)\hat{}(\xi) = |a|^{-n}(d_{\frac{1}{a}}\hat{f})(\xi)$
4. $\int \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x$

4.6 Definition: Inverse Transformation

Die *inverse Transformation* ist für $u \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert via:

$$\check{u}(x) := (\mathcal{F}^{-1}u)(x) := (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad x \in \mathbb{R}^n$$

4.7 Theorem: FT ist Isomorphismus auf S

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $S(\mathbb{R}^n)$, d.h. $(\check{u})\hat{} = u$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$.

4.8 Lemma: Faltung und schnell fallende Funktionen

Sei $f, g \in S$. Dann gilt: $f * g \in S$

4.9 Theorem: Verbindung zw. FT und Faltung

Seien $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

1. $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$
2. $(fg)\hat{} = (2\pi)^{-n}(\hat{f} * \hat{g})$
3. $\int fg\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\int \hat{f}\hat{g}\,\mathrm{d}x$ (Parseval'sche Gleichung)

4.10 Beispiel: Wärmeleitungsgleichung

Gesucht ist die Lösung folgender PDE (partial differential equation):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

Wende FT bzgl. x an: $\hat{u}_t(\xi) = -|\xi|^2\hat{u}(\xi),\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi)$, dies ist eine ODE (ordinary differential equation) mit der Lösung: $\hat{u}(\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-t|\xi|^2} \Rightarrow u = (\hat{u})\check{} = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) * u_0$. $\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{4t}} =: k_t$, also ist die Lösung der WLG gegeben durch: $u = k_t * u_0$.

4.11 Definition: temperierte Distribution

Eine *temperierte Distribution* ist eine stetige Linearform auf S:

$$S'(\mathbb{R}^n) := \{T : S \to \mathbb{C},\ T \text{ temperierte Distribution}\}$$

4.12 Definition: Standardoperationen

Sei $T \in S'(\mathbb{R}^n),\ p$ Polynom, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \langle pT, \varphi\rangle := \langle T, p\varphi\rangle$$

Dann gilt: $D^\alpha T,\ pT \in S'(\mathbb{R}^n)$.

4.13 Definition: FT auf S'

Für $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{T}$ oder $\mathcal{F}T$ definiert via $\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle,\ \varphi \in S$.

4.14 Theorem: FT ist Isomorphismus auf S'

Die FT ist ein Isomorphismus auf $S'(\mathbb{R}^n)$. Die inverse FT ist: $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle$.

4.15 Beispiele

Sei $\varphi \in \mathcal{S}$.

1. $\langle \hat{\delta}, \varphi\rangle \overset{\text{Def.}}{=} \langle \delta, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) \overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle \Rightarrow \hat{\delta} = 1$
2. $\hat{1} \overset{\text{Th.}}{=} \hat{\hat{\delta}} = (2\pi)^n \delta$
3. $p(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha x^\alpha \Rightarrow \hat{p} = \sum a_\alpha (x^\alpha 1)\hat{} = \sum a_\alpha i^{|\alpha|} D^\alpha \hat{1} = \sum a_\alpha (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$

4.16 Fundamentallösung durch Fouriertransformation

Sei $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ ein Differentialoperator mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ (insbes. $\Delta, \partial_t - \Delta, \partial_{tt} - \Delta, i\partial_t - \Delta$).

- **Ziel** Finde Fundamentallösung für A, d.h. finde T mit $AT = \delta$
- **Strategie** $(AT)\hat{} \overset{4.15c}{=} p(i\xi) = \hat{T}$ und $\hat{\delta} \overset{4.15a}{=} 1$ also $p(i\xi)\hat{T} = 1$.
- **Ansatz** $\hat{T} = \frac{1}{p}$, falls dies lösbar ist, so ist T Fundamentallösung von A.

4.17 Theorem von Plancherel

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und Skalarprodukt: $(\hat{f}|\hat{g}) = (2\pi)^n (f|g)$ mit $f, g \in L^2$.
Ferner ist $\mathcal{F}$ Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

5 Fundamentallösungen durch Fouriertransformation

5.1 Die elliptische Gleichung

Gesucht ist die Lösung zu $-\Delta u + u = f$ im $\mathbb{R}^n$. Sei dazu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. FT: $(|\xi|^2+1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+|\xi|^2}$, also $u(x) = \check{\hat{u}}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+|\xi|^2} f(\xi)\right)(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right) * f\right)(x)$. Mit $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)(x) = \frac{(2\pi)^{-n}}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-t} \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{t^{n/2}}\,\mathrm{d}t =: B(x)$ folgt als Lösung:

$$u(x) = (B * f)(x) = c_n \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \frac{e^{-|x-y|^2/(4t)}}{t^{n/2}} f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$$

5.2 Wärmeleitungsgleichung

Die FT der WLG $u_t - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0, u(0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. x liefert: $\hat{u}_t(\xi) + |\xi|^2\hat{u}(\xi) = 0$, $\hat{u}(0) = \hat{u}_0(\xi)$ (ODE) $\Rightarrow \hat{u}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$. Also ist $u = k_t * u_0$ Lsg. der WLG mit $k_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-|x|^2/(4t)}$. Explizit:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

5.3 Schrödingergleichung

Es gilt: $u_t - i\Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, u(0) = u_0(x)$. Die FT bzgl. x: $\hat{u}_t(\xi) + i|\xi|^2\hat{u}(\xi) = 0, \hat{u}(0) = \hat{u_0}(\xi)$ (ODE) $\Rightarrow \hat{u}(\xi) = e^{it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$ ist Lsg. der ODE. Daher ergibt sich Formal aus der WLG:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\,\mathrm{d}y, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

Exkurs über die Heisenberg'sche Unschärferelation f und $\hat{f}$ können nicht gleichzeitig außerhalb endlicher Intervalle verschwinden, falls nicht $f \equiv 0$ gilt.
Mit der *Standardabweichung* $\Delta_a f := \frac{\int (x-a)^2 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int |f(x)|^2\,\mathrm{d}x}$ gilt: $\Delta_a f \cdot \Delta_\alpha \hat{f} \geq \frac{1}{4}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

5.4 Die Wellengleichung

$u_{tt} - \Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0;\ u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n;\ u_t(0,x) = u_1(x), x \in \mathbb{R}^n$.
FT bzgl. x liefert: $\hat{u}_{tt} + |\xi|^2\hat{u} = 0, t > 0; \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$.
Löse für $n > 1$ mit Hilfe der *Laplace-Transformation* (vgl. Bsp. 5.5):

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)\,\mathrm{d}t$$

Es ergibt sich unter der vereinfachenden Annahme $u_1 \equiv 0$, d.h.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta v &= 0 \\ u(0) &= g \\ u_t(0) &= 0 \end{cases}$$

somit für die Fundamentallösung in ungeraden Dimensionen > 1 die Darstellung
(mit $\gamma_n := (n-2)(n-4)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1$):

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma^n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n-2} \int_{\partial B(x,t)} g(s)\,\mathrm{d}s \qquad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

5.5 Beispiel: Laplace-Transformation

Wende Laplace-Transformation an auf Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} v_t - \Delta v &= 0 \\ v(x,0) &= v_0(x) \end{cases}$$

Dann gilt $\Delta\mathcal{L}v(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta v(x,t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{WLG}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t} v_t(x,t)\,\mathrm{d}t$
$= e^{-\lambda t} v\big|_0^\infty + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} v(x,t)\,\mathrm{d}t = v(0) + \lambda\mathcal{L}v(x,\lambda)$. Für $u := \mathcal{L}(v)$ gilt: $-\Delta u + \lambda u = f$.

6 Randwertprobleme, Fundamentallsg.: klassische Theorie

Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ glatt. Für $f : \Omega \to \mathbb{R}, g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ betrachte:

- **Dirichlet-Problem (DP)**: Finde $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = f$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$
- **Neumann-Problem (NP)**: Finde $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta u = f$ in Ω, $\partial_\nu u = g$ auf $\partial\Omega$

6.1 Bemerkung zu Dirichlet- (DP) und Neumann-Problem (NP)

1. Maximumsprinzip $\Rightarrow$ Lösung von (DP) ist eindeutig
2. keine Eindeutigkeit bei (NP), da mit u auch $u + c, c \in \mathbb{R}$ Lösung ist

6.2 Teilweise homogenes (DP)

Betrachte

$$1) \begin{cases} \Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{cases}$$

Dann sind 1) und 2) im „Wesentlichen" äquivalent, d.h. ist 1) lösbar, dann sei $\tilde{g}$ Fortsetzung auf Ω mit $\tilde{g} \in C^2(\Omega)$. Dann besagt 1): $\exists v : \Delta v = \Delta \tilde{g}$ in Ω und $v|_{\partial\Omega} = 0$. Setze $w = \tilde{g} - v \Rightarrow w$ löst 2). Ist umgekehrt 2) lösbar, dann setze $w = u + E * f$ (E Fundamentallsg.), wobei u Lösung von $\Delta u = 0$ in Ω und $u|_{\partial\Omega} = -E * f|_{\partial\Omega}$ ist $\Rightarrow w$ löst 1).

6.3 Satz von Green

Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $\int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega v \Delta u \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v \nabla u \, \mathrm{d}x$
2. $\int_{\partial\Omega} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v) \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v) \, \mathrm{d}x$

Sei E Fundamentallsg. von $\Delta E = \delta$. Setze $\tilde{f}(x)$ als triviale Fortsetzung von $f(x) \Rightarrow E * \tilde{f}$ ist Lsg. von $\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ Für $y \in \Omega$ ist $y \mapsto u(y) = E * \tilde{f} = \int_\Omega E(y - x) f(x) \, \mathrm{d}x$.
Problem: u erfüllt i.A. nicht die Randbedingungen.
Idee: Versuche durch Add. einer Fkt. $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, v$ harmonisch in Ω, die Randbed. zu erfüllen, d.h. def. $x \mapsto G(x) := E(y - x) + v(x), x \in \mathbb{R}$. G ist Fundamentallösung im Punkt $y \in \Omega$.

6.4 Lemma: Green'sche Darstellungsformel

Seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta v = 0$ in Ω. Ferner sei $G(x) := E(y - x) + v(x), x \in \overline{\Omega}, y \in \Omega \Rightarrow$ $u(y) = \int_\Omega G \Delta u \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (u \partial_\nu G - G \partial_\nu u) \, \mathrm{d}\sigma(x)$

6.5 Korollar: Green für (DP)

Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ Lösung von (DP), dann gilt $u(y) = \int_\Omega G f \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (g \partial_\nu G - G \partial_\nu u) \, \mathrm{d}\sigma$

Bemerkung Falls $G|_{\partial\Omega} = 0$, dann hat man u durch f und g ausgedrückt.

6.6 Definition: Green'sche Funktion 1. und 2. Art

Eine Funktion $G : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ heißt *Green'sche Funktion* für Ω falls

1. G stetig auf $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$
2. $\forall y \in \Omega$ ist die Funktion $y \mapsto G(x, y) - E(y - x), x \in \Omega$ harmonisch
3. $G = 0$ auf $\partial\Omega$ (1. Art) oder $\partial_\nu G = \frac{1}{\mu(\partial\Omega)}$ auf $\partial\Omega$ (2.Art)

Bemerkung Definition 1. Art macht auch Sinn für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

6.7 Satz: Stetige Fortsetzung

Sei $g \in C(\partial\Omega)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert als $u(y) = \int_{\partial G} g(x) \partial_{\nu_x} G(y, x) \mathrm{d}\sigma(x) \Rightarrow u$ besitzt stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ mit $u|_{\partial\Omega} = g$

6.8 Bemerkung: Poisson-Kern und Integralformel

Die Funktion $(y, x) \mapsto \partial_{\nu_x} G(y, x) \quad (y, x) \in \overline{\Omega} \times \partial\Omega$ heißt *Poisson-Kern* für Ω und $u(y) = \int_{\partial G} g(x) \partial_{\nu_x} G(y, x) \, \mathrm{d}\sigma(x)$ heißt *Poisson-Integralformel* für das (DP).

7 Das Dirichletsche Prinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\Delta u = 0$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$.

7.1 Theorem: Dirichletsches Prinzip

Mit der *Energiefunktion* $E(w)$ gilt:

$$E(w) := \frac{1}{2} \int |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x, \;\; w \in A := \left\{ w \in C^2(\overline{\Omega}), w = g \text{ auf } \partial\Omega \right\}$$

1. u erfülle $E(u) = \min_{w \in A} E(w) \Rightarrow u$ löst (DP)
2. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ Lösung des (DP) $\Rightarrow E(a) = \min_{w \in A} E(w)$

7.2 Lemma: konvexes Dirichletintegral

Das Dirichletintegral ist konvex, d.h. $|E(u)| = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2$ erfüllt

$$E(tu + (1-t)v) \leq tE(u) + (1-t)E(v) \quad 0 \leq t \leq 1, \;\; u, v \in A$$

7.3 Definition: Sobolevraum

Für $I = (a, b)$ definieren wir den *Sobolevraum* $H^1(I)$ durch

$$H^1(I) = \{ u \in L^2(I) : \exists g \in L^2(\Omega) \text{ mit } \int_a^b u\phi' = -\int_a^b g\phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(I) \}$$

und nennen $Du := g$ die *schwache Ableitung* von u.

Bemerkung

- g ist eindeutig bestimmt.
- Definiere ein Skalarprodukt als

$$(u|v)_{H^1(I)} := (u|v)_{L^2(I)} + (u'|v')_{L^2(I)}$$

- H^1 ist ein Hilbertraum, wenn man folgende Norm definiert:

$$\|u\|_{H^1(I)} := \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)} \right)^{1/2}$$

7.4 Definition: H_0^1

Für $-\infty < a < b < \infty$ setze $H_0^1 := \overline{C_c^\infty}^{H^1}$

7.5 Lemma: Eigenschaften von H_0^1

$u \in H_0^1(a, b) \Leftrightarrow u(a) = u(b) = 0$.

7.6 Theorem: Ungleichung von Poincaré

Wenn die Gradientenfolge konvergiert, konvergiert die Folge selbst. Formal:

$$-\infty < a < b < \infty \;\; \Rightarrow \;\; \exists c \in \mathbb{R} : \|u\|_{L^2(I)} \leq c\|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H_0^1(a, b)$$

7.7 H^m Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \exists g_1, \dots, g_n \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi,\ \phi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\}$$

Dann heißt g_i *schwache Ableitung* von u in Richtung x_i. Definiere ferner für $m \geq 2$:

$$H^m(\Omega) := \left\{ u \in H^{m-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\}$$

Dann gilt:

$$u \in H^m(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^2(\Omega) \text{ und } \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ ex. } g_\alpha \in L^2 : \int u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int g_\alpha \phi$$

Des weiteren gilt: $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$ und $\|u\|_{H^{m+2}} \leq c\|f\|_{H^m}$.
Dabei gilt: $H^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum, wenn man es mit folgender Norm versieht:

$$\|u\|_{H^m} := \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2}$$

7.8 Satz: Charakterisierung von Sobolevräumen

Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann:

1. $u \in H^m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$
2. Äquivalent sind die Normen $\|u\|_{H^m}$ und $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}$
3. **Lemma von Sobolev:** $H^s(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ falls $s > k + \frac{n}{2}$

7.9 Theorem: Existenz einer eindeutigen Lösung des (DP)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega$ glatt, dann besitzt das Problem

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$, falls $f \in H^m(\Omega)$ und $m > \frac{n}{2}$

7.10 Schritte zur Lösung des (DP)

Das (DP): $\Delta u = -f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ wird durch folgende Schritte gelöst:

1. Schwache Formulierung des Problems:

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v = \int_\Omega f \cdot v,\ v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v,\ v \in H_0^1(\Omega)\ (\star)$$

   Eine *schwache Lösung* des (DP) ist eine Funktion $u \in H_0^1$, welche $(\star)$ erfüllt.

2. Finde via Dirichletschem Prinzip eine eindeutige, schwache Lösung.
3. Regularitätsgewinn der schwachen Lösung via *Lemma von Sobolev*
4. Rückkehr zur klassischen Lösung

8 Andere Lösungsmethoden

8.1 Separation der Variablen

Zur Vermittlung der Technik ein konkretes Beispiel: Betrachte die *Wärmeleitungsgleichung* in beschränken, offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

$$(8.1) \begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \\ u|_{t=0} &= g \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

Ansatz: $u(x,t) = v(t)w(x),\ x \in \Omega, t > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= v_t(t)w(x) \\ \Delta u(x,t) &= v(t)\Delta w(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = v_t(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) \quad \Leftrightarrow \frac{v_t}{v} = \frac{\Delta w}{w}, x \in \Omega, t > 0$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} : \frac{v_t}{v} = \mu = \frac{\Delta w}{w}$$

Also ist mit den gegebenen Anfangs- und Randbedingungen zu lösen:

1. $v_t(t) = \mu v(t),\ t \geq 0$
2. $\Delta w(x) = \mu w(x),\ x \in \Omega$

zu 1.: $v(t) = c\,e^{\mu t},\ t \geq 0$
zu 2.: Wir sagen: λ ist Eigenwert (EW) von $-\Delta$ auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen (DRB), falls $w \not\equiv 0$ existiert mit:

$$\text{Eigenwertproblem (EWP)} \begin{cases} -\Delta w &= \lambda w \quad \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} &= 0 \end{cases}$$

w heißt Eigenfunktion (EF) von $-\Delta$ zum EW λ.
Zurück zu Problem (8.1): Falls λ EW mit zugehörigen EF w, setze

$$\mu = -\lambda \text{ und } u(t,x) = c\,e^{-\lambda t}w(x)$$

Dann gilt: $u_t(x,t) = -\lambda c\,e^{-\lambda t}w(x)$, $-\Delta u(x,t) = \lambda c\,e^{-\lambda t}w(x)$, also:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \\ u|_{t=0} &= cw \quad \text{auf } \Omega \end{cases}$$

somit löst u (8.1), falls $g = cw$.

Allgemeiner: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ EW mit EF $w_1, \dots, w_m \Rightarrow u(x,t) = \sum_{j=1}^m c_j e^{-\lambda_j t} w_j(x)$ ist Lösung von (8.1) zum Anfangswert $g = \sum_{j=1}^m c_j w_j$.
Der Raum, in dem g liegt (z.B. $C(\Omega)$) ist i.A. unendlich dimensional, deshalb …

Noch allgemeiner: Sei (λ_j) Folge von EW mit der zugehörigen Folge von EF (w_j). Falls $g = \sum_{k=1}^\infty c_k w_k$, dann ist $u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty c_k e^{-\lambda_k t} w_k(x)$ ein Kandidat für die Lösung von (8.1). Bleibt nur noch die Frage, welche g sich wie oben darstellen lassen.

8.2 Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension

Betrachte (8.1) für Dimension $n = 1$ und $\Omega = (0, 2\pi)$. Dann EWP die Gestalt:

$$\begin{cases} -w'' &= \lambda w \quad \text{in } (0,2\pi) \\ w(0) = w(2\pi) &= 0 \end{cases}$$

Als Ansatz wählt man $w(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sqrt{\lambda}2\pi = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Die Randbedingungen lauten

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 &=& w(0) = B \\ 0 &=& w(2\pi) = A\sin(\sqrt{\lambda}2\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda_k = k^2, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

Also ist $w(x) = \sin(kx)$ Eigenfunktion (EF) zu EW λ_k von $-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$ auf $(0, 2\pi)$ mit DRB.
Gilt $w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) \quad (\star)$, dann ist

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \text{ mit } (x,t) \in (0,2\pi) \times (0,\infty)$$

Kandidat für die Lösung von (8.1). Also lautet die Frage: Welche g haben die Darstellung $(\star)$?
Sind u, g stetig, dann ergibt sich mit der Vertauschbarkeit der Spuroperatoren folgende Kompatibilitätsbedingung aus (8.1):

$$g|_{\partial\Omega} = u(x,0)|_{\partial\Omega} = (u(x,t)|_{t=0})|_{\partial\Omega} = (u(x,t)|_{\partial\Omega})|_{t=0} = 0$$

Gilt $g \in C((0,2\pi))$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$, dann hat die Fourierreihe (FR) von g die Darstellung

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \qquad x \in (0,2\pi)$$

Zusammenfassung Ist $g \in C((0,2\pi))$ mit $g(0) = g(2\pi) = 0$ und $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ mit $x \in (0,2\pi)$ die FR von g (die für $g \in C((0,2\pi))$ existiert), dann ist

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

die Lösung von

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u''(x,t) &= 0 \qquad (x,t) \in (0,2\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(2\pi,t) &= 0 \qquad t \in (0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) \quad x \in (0,2\pi) \end{cases}$$

8.3 Wellengleichung in einer Dimension

$$(8.2) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad (x,t) \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \\ u|_{t=0} &= g \quad \text{in } \Omega \\ u_t|_{t=0} &= h \quad \text{in } \Omega \end{cases}$$

Ansatz: $u(x,t) = v(t)w(x), x \in \Omega, t > 0$. Dann gilt:

$$\Rightarrow \frac{v_{tt}}{v} = \frac{\Delta w}{w},\ x \in \Omega, t > 0 \ \Rightarrow\ \exists \mu \in \mathbb{R} : \frac{v_{tt}}{v} = \mu = \frac{\Delta w}{w},\ x \in \Omega, t > 0$$

Setze $\mu = -\lambda$, dann sind mit den Anfangs- und Randbedingungen zu lösen:

1. $v_{tt}(t) = -\lambda v(t)$, $t \geq 0$
2. $-\Delta w(x) = \lambda w(x)$, $x \in \Omega$

zu 1.: $v(t) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}t}, t \geq 0$
zu 2.: Analog zu (8.1) sei w_n eine EF zum EW λ_k, dann ist

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k e^{i\sqrt{\lambda_k}t} w_k(x) + d_k e^{-i\sqrt{\lambda_k}t} w_k(x) \right), \quad x \in \Omega, t \geq 0$$

ein Kandidat zur Lösung von (8.2) zu den Anfangswerten

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k) w_k(x) \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} i\sqrt{\lambda_k}(c_k - d_k) w_k(x)$$

Wieder stellt sich die Frage, für welche Anfangswerte eine solche Darstellung gefunden werden kann, d.h. für welche Räume X bilden die Eigenfunktion von Δ mit Dirichlet-Randbedingungen eine Basis von X? Die Antwort liefert eine Verallgemeinerung des Spektralsatzes auf Hilberträume und Operatoren.

8.4 Basis des Laplace Operators

Bestimme also eine „Basis“ aus EV des Δ von $L^2(\Omega)$, welche dann zu einer Lösungsdarstellung von $u_t - \Delta u = f$ bzw. $u_{tt} - \Delta u = f$ in Ω führt.
Hierzu: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und (mit $a \in C(\overline{\Omega})$)

$$(P) \begin{cases} \Delta u + au &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Die schwache Lösung von (P) ist $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega a\, u\, v = \int_\Omega fv, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Wie erhält man die schwache Lösung? Sei $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega a\, u\, v$ und $b(v) := -\int_\Omega fv$, dann gilt: a ist eine stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ und b eine stetige Linearform auf $H_0^1(\Omega)$.
Ist a koerziv, d.h. $a(u,u) \geq c\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$? Da Ω beschränkt, folgt mit der Poincaré'schen Ungleichung, dass dem so ist. Mit der Poincaré-Konstanten c_Ω gilt:

$$a(u,u) \geq \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \left(\frac{1}{c_\Omega} - \sup_{x \in \overline{\Omega}} a - \varepsilon \left(1 - \frac{1}{c_\Omega^2} \right) \right) \|u\|_2^2$$

Das heißt, für $A := \sup_{x \in \overline{\Omega}} a(x)$ gilt:

Lemma Falls a koerziv ist, existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung von (P).

Definition Betrachte $\frac{1}{c^2} - A \leq 0$. Definiere nun

$$a_\lambda(u,v) := a(u,v) + \lambda \int_\Omega uv \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Mit dem Lemma folgt, dass a koerziv ist, falls

$$\frac{1}{c_\Omega^2} - A + \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > A - \frac{1}{c_\Omega^2}$$

Fixiere $\lambda_0 > A - \frac{1}{c_\Omega^2}$, dann existiert genau ein $u^* \in H_0^1(\Omega)$ mit $a_{\lambda_0}(u^*, v) = (u|v)_{L^2}, v \in H_0^1(\Omega)$.
Die Abbildung $u \mapsto u^*$ induziert eine lineare Abbildung $R_{\lambda_0} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ mit:

- $R_{\lambda_0} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist „stetig“.
- $R_{\lambda_0} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ „kompakt“, d.h. sie bildet die Einheitskugel in $L^2(\Omega)$ ab in relativ kompakte Mengen in $L^2(\Omega)$, deren Abschluss also kompakt ist.

Satz Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von

$$\Delta u + au - \lambda u = f \Leftrightarrow \forall w \exists u : u + (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0) u = w$$

Das ist nun eine Operatorgleichung (statt eines EWP) der Form $(\mu - \mathrm{Id})Tf = g$.