1. Bewegung von Massenpunkten

1.1 Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$
Bahngeschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$
Zentripetalbeschleunigung

$$a = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r})|$$

1.2 Mechanik des Massenpunktes

Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Federpendel $\omega = \sqrt{D/m}$
Mathematisches Pendel $\omega = \sqrt{g/l}$
Reibungskraft $F = \mu F_G \cos\alpha$
Corioliskraft $\mathbf{F} = 2m(\mathbf{v} \times \vec{\omega})$

2. Energie

2.1 Energieformen

Kinetische Energie $dE_k = d(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2)$
Potentielle Energie bei Feder $E_P = \frac{1}{2}Dx^2$
Potentielle Energie bei Hubarbeit $E_P = mgh$
Gravitationspotential $E_P(r) = -\frac{GMm}{r}$

3. Impuls

Kraftstoß: $d\mathbf{p} = \mathbf{F}(t)dt$

3.1 Zentraler elastischer Stoß

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

3.2 Zentraler inelastischer Stoß

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad \Delta E_{\text{kin}} = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

3.3 Raketengleichung

Allgemeiner Ansatz: $m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - F^{\text{ext}}$
Lösung mit Gravitation in Erdnähe:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_A}{m_A - \mu t}\right) - gt = u \ln\left(\frac{m_A}{m(t)}\right) - gt$$

$m(t)$: zeitliche Masse der Rakete; m_A: Anfangsmasse; $\mu = -\frac{dm}{dt}$: Massendurchsatz; u: Geschw. Gase relativ zur Rakete

4. Drehimpuls

4.1 Definitionen

Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

4.2 Bahnbewegung durch Zentralkraft

v_r als Funktion vom r bei gegebenem L und E:

$$\frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r} = E = const.$$
$$U' = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r} \Rightarrow E = \frac{m}{2}v_r^2 + U'(r)$$

Je nach E ergeben sich drei mögliche Bahnkurven:
1. $E = E_1 > 0$: kein gebundener Zustand, Hyperbelbahn
2. $E = E_2 =$ Minimum von $U' < 0$: Kreisbahn
3. $E_2 < E = E_3 < 0$: Oszillation zw. Kreisbahnen, Ellipse

4.3 Drehimpuls starrer Körper

Definition des *Trägheitsmomentes*:

$$J = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \varrho \, dV$$

Steinerscher Satz: $J_A = J_S + ma^2$

4.4 Spezielle Trägheitsmomente

dünne Stange	$J = \frac{1}{3}ml^2$ (Rotation um eines der Enden)
Hohlzylinder	$J = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Vollzylinder	$J = \frac{m}{2}r^2$
Kugel	$J = \frac{2}{5}mr^2$

4.5 Das physikalische Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{smg}{J_S + ms^2}}$$

4.6 Nutation und Präzession

Präzesionsfrequenz ω_p:

$$d\alpha = \frac{d\mathbf{L}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{M}dt}{\mathbf{L}} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega_{\text{Kreisel}}}$$

4.7 Zusammenfassung

Rotation
Drehimpuls $L = J\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
$M = J\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}J\omega = \frac{d}{dt}L = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Arbeit $\int M d\varphi$
Leistung $M\dot{\varphi} = M\omega$
Torsionsfeder $M = -D^*\varphi$
Drehimpulserhaltung $\sum J\vec{\omega} = \sum J\vec{\omega'}$

5. Elastische Eigenschaften

5.1 Dehnung

Spannung: $\sigma = \frac{F}{A}$ Dim. : $\frac{N}{m^2}$
Dehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ dimensionslos
Hook'sches Gesetz (Elastizitätsmodul, Youngs-modul):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Fl}{A\Delta l} \qquad \text{Dim.} : \frac{N}{m^2}$$

5.2 Querkontraktion

Poissonzahl: $\mu = -(\frac{\Delta d}{d})/(\frac{\Delta l}{l})$
Verringerung des Durchmessers: $-\frac{\Delta d}{d} = \mu\frac{\Delta l}{l} = \mu\varepsilon = \frac{\mu}{E}\sigma$

5.3 Kompressionsmodul

Körper unter allseitigem Druck: $p = -\frac{F}{A} = -\sigma$
Volumenänderung: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu) = -p\frac{3}{E}(1 - 2\mu)$
Kompressionsmodul κ:

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{\kappa} \Rightarrow \kappa = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \qquad \text{Dim.} : \frac{N}{m^2}$$

Kompressibilität $K = \frac{1}{\kappa}$

5.4 Scherung

Schubspannung: $\tau = \frac{F}{A}$
Scherwinkel α(in rad) ist proportional zur Schubspannung:

$$\alpha = \frac{\tau}{G} \to \tau = \alpha G \qquad \text{Schubmodul } G\Big[\frac{N}{m^2}\Big]$$

Für *isotrope* Materialien gibt es nur zwei unab. Größen:
$\kappa = \frac{E}{3(1-2\mu)}$, $\frac{E}{2G} = 1 + \mu$ wobei $0 < \mu < 0,5 \to \frac{E}{2} > G > \frac{E}{3}$
Torsionsfeder: $D^* = \frac{\pi G}{2l}R^4 \to \omega = \sqrt{D^*/J}$

5.5 Balkenbiegung

Drehmoment an Stelle x (a als Höhe des Balkens):

$$\mathbf{M} = \frac{2\sigma_{Rand}(x)}{a}I$$

Flächenmoment: $I = \int y^2 dA$
Auslenkung im Abstand x: $h(x) = \frac{Fx^2}{6EI}(3l - x)$

6. Schwingungen

6.1 Ansatz für Dämpfung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -Dx - b\dot{x} \\ \omega_0^2 = \frac{D}{m},\ \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} &\Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_o^2} \\ x(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

6.2 Schwache Dämpfung (Normalfall)

$$\text{Es gilt: } \omega_0 > \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$$
$$x(t) = e^{-t/(2\tau)}\left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0 + x_0/(2\tau)}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

Dämpfungsverhältnis: $K = e^{\frac{T}{2\tau}} = \frac{x(t)}{x(t+T)}$
logarithmisches Dekrement: $\Lambda = \ln K = \frac{T}{2\tau}$
Gütefaktor:

$$Q = \omega_0\tau = \frac{-E}{\frac{dE}{dt}\frac{1}{\omega_0}} = \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{in Zeit } \frac{1}{\omega} \text{ abgegebene Energie}}$$

6.3 Überdämpfte Schwingung

$$\text{Es gilt: } \omega_0 < \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_o^2}$$
$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(B_1 e^{\Omega t} + B_2 e^{-\Omega t}\right)$$

Randbedingungen: $t = 0 : x(t = 0) = x_0,\ \dot{x}(t = 0) = 0$

$$B_1 = \frac{x_0}{2}\Big(1 + \frac{1}{2\tau\Omega}\Big) \qquad B_2 = \frac{x_0}{2}\Big(1 - \frac{1}{2\tau\Omega}\Big)$$

6.4 Aperiodischer Grenzfall

$$\text{Es gilt: } \omega_0 = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \text{Sonderfall} : \Omega \to 0$$
$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(C_1 + C_2 t)$$

Randbedingungen: $t = 0 : x(t = 0) = x_0,\ \dot{x}(t = 0) = 0$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}\Big(1 + \frac{t}{2\tau}\Big)$$

6.5 Erzwungene Schwingungen

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = F(t) = F_0\cos(\omega t)$$

mit $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$; $\alpha_0 = \frac{F_0}{m}$:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0\cos(\omega t)$$

Amplitude, Phasenverschiebung und Schwingungsgleichung:

$X_0 =$	$\frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}}$	Amplitude
$\varphi =$	$\arctan\frac{\omega/\tau}{\omega^2-\omega_0^2}$	Phasenverschiebung
$x(t) =$	$X_0\cos(\omega t + \varphi)$	Schwingungsgleichung
$Q =$	$\frac{X_0(\omega=\omega_0)}{X_0(\omega=0)} = \tau\omega_0$	Resonanzüberhöhung
$\langle P\rangle =$	$\frac{m\alpha_0\tau}{2}\frac{(\omega/\tau)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}$	Absorbierte Leisung

6.6 Gekoppelte Schwingungen, Schwebung

Spezialfall: $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = A$

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)$$
$$\omega_1 = \omega_0;\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2D}{m}} \approx \omega_0\sqrt{1 + \frac{2D}{m\omega_0^2}}$$

7. Flüssigkeiten

7.1 Druck

$$p = \frac{F}{A}, \quad 1\frac{N}{m^2} = 1 \text{ Pa} = 10^{-5}\text{bar}$$

Einheiten des Druckes:

$$\begin{aligned} 1 \text{ atm} &= 101325 \text{ Pa } = 1,01325 \text{ bar } = 760 \text{ Torr} \\ 1 \text{ Torr} &= \frac{101325}{760} \text{ Pa } \to 1 \text{ bar } = 750 \text{ Torr} \end{aligned}$$

Schweredruck: $p = \frac{F}{A} = \varrho gh$
Auftrieb: $F_A = \varrho_{Fl}gV = m_{Fl}g$
Barometrische Höhenformel: -d$p = \rho(h)g$dh

$$p = p_0 e^{-g\varrho_0 h/p_0} = p_0 e^{-Mgh/(RT)}$$

7.2 Oberflächenspannung

Spezifische Oberflächenenergie:

$$\sigma = \frac{\text{Arbeit } \Delta W \text{ zur Bildung der Oberfläche } \Delta A}{\text{Fläche } \Delta A}$$

Arbeit zur Oberflächenvergrößerung: $\Delta W = 2\sigma\Delta A$
Oberflächenspannung:

$$\sigma = \frac{F}{2d} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge des Randes der Oberfläche}}$$

Tröpfchengröße (Rohrdurchmesser r): $Vg\rho = 2\pi r\sigma$
Flüssigkeitsblase $p = 4\sigma/r$
Steighöhe Kapillarität (K - Körper; F - Flüssigkeit; G - Gas):

$$h = \frac{2(\sigma_{GK} - \sigma_{KF})}{\varrho gr}$$

7.3 Bernoulli-Gleichung

Kontinuitätsgleichung: $A_1 v_1 = A_2 v_2$
Bernoulli-Gleichung $p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + g\varrho h =$ const.

7.4 Viskosität

$$F = \eta A\frac{v}{x} = \eta A\frac{dv}{dx} \qquad [\eta] = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms}$$

7.5 Laminare Strömung

Geschw.profil bei Strömung durch Rohr mit Radius R:

$$2\pi rl\eta\frac{dv}{dr} = -(p_2 - p_1)\pi r^2 \Rightarrow v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta}\frac{p_2 - p_1}{l}$$

Durchfluss: $\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_2 - p_1}{l}R^4$

7.6 Turbulente Strömung

Übergang zur turbulenten Strömung wird durch die *Reynoldszahl* beschrieben:

$$R_e = \frac{\varrho\bar{v}d}{\eta} \qquad \text{Grenze: 2300}$$

8. Wellen

8.1 Wellengleichungen und Dispersionsrelation

Die allgemeine Wellengleichung für eine beliebige Störung:

$$\xi = f(x \pm ct)$$

Im Fall der hamonischen Welle ergibt:

$$\begin{aligned} \xi &= A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) = A\cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}(x - ct)\right) \\ &= A\cos(\omega(\frac{x}{c} - t)) = A\cos(kx - \omega t) \\ \xi &= A\cos(\mathbf{kr} - \omega t) \text{ (Vektorschreibweise)} \end{aligned}$$

mit dem Wellenvektor (auch Wellenzahl):

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und der *Dispersionsrelation*: $\omega = c \cdot k$

8.2 DGL der Wellenausbreitung

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

8.3 Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Longitudinale Schallwellen in (dünnen) Stäben: $c = \sqrt{E/\varrho}$
Transversale Wellen in (dünnen) Stäben: $c = \sqrt{G/\varrho}$
Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten (adiabatisch):

$$c = \sqrt{K/\varrho} = \sqrt{\kappa\frac{RT}{M}} \ (M = \text{Molmasse})$$

8.4 Doppler-Effekt

Ein positives v bedeutet ein Aufeinanderzubewegen von Quelle und Beobachter.
1. Fall: ruhende Quelle u. Medium und bewegter Beobachter:

$$\nu = \nu_0(1 + v/c)$$

2. Fall: bewegte Quelle und ruhender Beobachter:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - v/c}$$

Gilt $v^2/c^2 \ll 1$ sind beide Gleichungen identisch.
3. Fall: relativistisch: $\nu = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v/c}\nu_0$
Mach'scher Kegel: $\sin\alpha = c/v = 1/M$
Mach'sche Zahl: $M = v/c$; Halber Öffnungswinkel: α

8.5 Energie und Energiedichte einer Welle

Energiedichte u: $u = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 A^2$
Energiestromdichte (Intensität) I einer Welle:

$$\begin{aligned} I &= c \cdot u \quad [I] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit Fläche}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}} \\ &= \frac{1}{2}\varrho\omega^2 cA^2 \end{aligned}$$

Impulsstromdichte (Schallstrahlungsdruck):

$$p_{\text{Str.}} = \frac{I}{c} = u$$

Lautstärke in Phon beim Normalton von $1000Hz$:

$$L_N = 10\lg\frac{I}{I_0} \quad I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$$

8.6 Gruppengeschwindigkeit

Für nichtlineare Dispersion: $\omega = c_P(k) \cdot k$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_P + k\frac{dc}{dk} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}$$

Man unterscheidet *normale Dispersion* ($c_g < c_P$) und *anormale Dispersion* ($c_g > c_P$).

9. Wärmelehre

Translationsenergie: $\overline{E_{\text{trans}}} = \frac{3}{2}k_B T$

9.1 Thermische Ausdehnung

Längenänderung: $l = l_0\left[1 + \alpha(T - T_0)\right]$
Volumenänderung (γ: Volumenausdehnungskoeffizient):

$$V = l_0^3\left[1 + \alpha(T - T_0)\right]^3 \approx l_0^3\left[1 + 3\alpha(T - T_0)\right] = V_0\left[1 + \gamma(T - T_0)\right]$$

9.2 Thermospannung / Kontaktpotentiale

Seebeck (Thermokraft): $\epsilon = \frac{dU}{dT} \quad \Rightarrow \quad U = \epsilon\Delta T$
Wärmeleistung (π: Peltierkoeffizient): $P = \pi I$
Zusammenhang zw. ϵ und π: $\pi = \epsilon T$

9.3 Kinetische Theorie der Gase (ideales Gas)

Druck auf Begrenzungsfläche: $p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}mv^2$
Stoßzahlen: $z = \sqrt{2}\sigma\bar{v}\frac{N}{V}$, $Z_W = p/\sqrt{2\pi mk_B T}$

9.4 Maxwell-Bolzmann Geschwindigkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeit für Geschwindigkeit v:

$$P(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-(mv^2)/(2k_B T)}$$

Gewschwindigkeitsmittelungen:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \\ \bar{v} &= \int_0^\infty dvvP(v) = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \\ \sqrt{\overline{v^2}} &= \sqrt{\int_0^\infty dvv^2 P(v)} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \end{aligned}$$

9.5 Van der Waals Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Zusammenhang zwischen a, b und den kritischen Werten:

$$V_{m,K} = 3b; \quad T_K = \frac{8a}{27Rb}; \quad p_K = \frac{a}{27b^2}$$

Gasgleichung am kritischen Punkt: $p_K V_{m,K} = \frac{3}{8}RT_K$

9.6 Gesetz von Clausius-Clapeyron

Umwandlung von Zustand i in k (Q_{ik} Umwandlungswärme):

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dT}} = \frac{T}{Q_{ik}}(V_k - V_i), \text{ bzw. } \frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S_m}{\Delta V_m} = \frac{\Delta H}{T\Delta V}$$

Dampfdruckkurve : $p = p_0 e^{-\frac{Q_V}{RT}} = p^* e^{\frac{\Delta_V H}{R}(T^{*-1} - T^{-1})}$

9.7 1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$dU = dW + dQ$$

9.8 Formeln zur Arbeit an und Wärme von Gasen

Volumenarbeit: $dW = -pdV$
Wärmekapazität: $dQ = CdT = mcdT = nC_m dT$
Energie pro Mol und molare Wärmekapazität:

$$\begin{aligned} U_M &= RT\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}f_{rot} + f_{vibr}\right) \\ \Rightarrow c_{m,V} &= \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{dU_M}{dT} = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}f_{rot} + f_{vibr}\right) \\ c_{m,V} &= 3R = 24,94\frac{J}{mol\,K} \quad \text{(für Festkörper)} \\ c_{m,p} &= c_{m,V} + R \quad \text{(für ideales Gas)} \end{aligned}$$

Adiabatenkoeffizient: $\kappa = \frac{c_{m,p}}{c_{m,V}} \overset{\text{id. Gas}}{=} \frac{f+2}{f}$
Zusammenstellung der Größen und Beziehungen:

	ΔE_{mech}	ΔQ	ΔS
isochor	0	$c_V m(T_2 - T_1)$	$c_V m\ln(T_2/T_1)$
isobar	$-p(V_2 - V_1)$	$c_p m(T_2 - T_1)$	$c_p m\ln(T_2/T_1)$
isotherm	$-nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$nR\ln(V_2/V_1)$
adiabat	$c_V m(T_2 - T_1)$	$= \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\kappa - 1}$	0

adiabat (jeweils konst.): pV^κ, $TV^{\kappa-1}$, $p^{1-\kappa}T^\kappa$ bzw. $p^{\kappa-1}T^{-\kappa}$

Volumenausdehnungskoeffizient: $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$
Kompressibilität: $K = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

9.9 Kreisprozesse

Carnot'scher Wirkungsgrad für Wärmekraftmaschine:

$$\eta_C = \frac{W_{\text{nutz}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{T_w - T_k}{T_w}$$

Carnot'scher Wirkungsgrad für Wärmepumpe:

$$\eta_{WP} = \frac{\text{bei } T_2 \text{ abg.Wärme}}{\text{aufg. Arbeit}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

9.10 Enthalpie und freie Energie

Enthalpie: $H = U + pV$
Joule-Thomson Effekt: $\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$
$\mu > 0 \to$ Abkühlung bei Druckverminderung
$\mu = 0 \to$ Inversionstemperatur

9.11 Entropie und Freie Energie

Definition über die Zustandswahrscheinlichkeit:

$$S = k_B\ln(\text{Wahrscheinlichkeit des Zustandes})$$

Entropieänderung: $dS \geq \frac{dQ}{T}$
Entropie des idealen Gases (reversibel):

$$S = C_V\ln T + nR\ln V + S_0$$

Entropiezunahme bei Wärmeübergang:

$$dS = |dQ|\left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_w}\right) \geq 0$$

Freie Energie: $F = U - TS$
Sie hat im Gleichgewicht ihren minimalen Wert.

9.12 Transportprozesse

Definition der Wärmestromdichte und Wärmeleitung:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda\nabla T \qquad [q] = \frac{W}{m^2}$$

Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\varrho c}\nabla^2 T$
Wärmedurchgang: $\dot{Q} = kA\Delta T$

$$\frac{1}{k} = \sum_i\frac{1}{\alpha_i} + \sum_j\frac{l_j}{\lambda_j}, \quad T(t) = T_\infty - (T_\infty - T_0)e^{-kA/(mc)\cdot t}$$

Streuung (n Teilchendichte, σ Wirkungsquerschnitt):

$$\dot{N}(x) = \dot{N}_0 e^{-n\sigma x} \qquad 1 \text{ barn} = 10^{-28}\text{m}^2$$

Freie Weglängen:

- in Festk. / Flüssigk.: $\bar{l} = \frac{1}{n\sigma}$ bzw. $\overline{l^2} = 2\bar{l}^2 = \frac{2}{(n\sigma)^2}$
- in Gasen: $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$

Teilchenstromdichte $\mathbf{j}$ bei Diffusion:

$$\mathbf{j} = -D\nabla n \qquad [j] = \frac{1}{m^2 s}; \quad [D] = \frac{m^2}{s}$$

Diffusionsgleichung: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n$
Teilchenverteilung durch Diffusion:

$$\begin{aligned} n(x,t) &= \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \\ \to \overline{x^2} &= 2Dt \\ D &= \frac{1}{3}\bar{v}\bar{l} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_b T}{\pi m}}\frac{k_b T}{p\sigma} \end{aligned}$$

9.13 Einstein Relation und Viskosität von Gasen

Kraft auf Teilchen führt zu Driftgeschw. (B Beweglichkeit):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{Drift}} &= B\mathbf{F} \\ B &= \frac{1}{6\pi\eta R} \quad R = \text{ Kugelradius} \end{aligned}$$

Zusammenhang mit Diffusionskonstante: $D = Bk_B T$
Viskosität von Gasen:

$$\eta = \frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{l} = Dnm = \frac{2}{3\sigma}\sqrt{\frac{mk_B T}{\pi}}$$

10. Elekrostatik

10.1 Coulomb-Gesetz und elektrisches Feld

Coulomb-Gesetz: $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$
Das elektrische Feld ($\varrho(\mathbf{r})$ Ladungsdichte):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\varrho(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

10.2 Elektrisches Potential

Elektrisches Potential:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\int_\infty^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\mathbf{E}(\mathbf{r}') \qquad [\Phi] = V \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi \end{aligned}$$

Potentielle Energie einer Ladung im el. Feld: $E_p = \Phi Q$
Potentiale:

- einer Punktladung: $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$
- einer Ladungsdichte: $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

10.3 Feld eines elektrischen Dipols

Dipolmoment: $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$
Potential und el. Feld des Fernfeldes:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{rp}}{r^3} \qquad \text{Abfall mit } r^2 \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{rp})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right] \qquad \text{Abfall mit } r^3 \end{aligned}$$

10.4 Gauß'scher Satz der Elektrostatik

mit Dielektrika (siehe Abschnitt 10.6):

$$\oint_F(\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P})\,df = \oint_F\mathbf{D}df = \oint_V\varrho\,dV$$

E-Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen Ladungsschicht:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

10.5 Kapazitäten

Plattenkondensator:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{1}{2d} C U^2$$

Kugelkondensator: $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R\cdot r}{R-r}$
Zylinderkondensator: $C = 2\pi\epsilon_0 L \left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-1}$
Energie des E-Feldes: $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$
Energiedichte des E-Feldes: $w(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}E(\mathbf{r})^2$

10.6 Isolatoren, Dielektrika, Dipole

Dipolmoment (α atomare Pol.barkeit): $\mathbf{p} = \epsilon_0\alpha\mathbf{E}$
Drehmoment: $\mathbf{M} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$
pot. Energie: $E_p = -\mathbf{pE}$
Kraft auf Dipol im inhomogenen E-Feld:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}(r)$$

Polarisation (n polarisierbare Atome pro Volumen, σ_p Oberflächenladung):

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \sigma_p$$

bei proportionalem Zusammenhang zwischen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{E}$ (χ_e el. Suzeptibilität):

$$\mathbf{P} = \chi_e\epsilon_0\mathbf{E}$$

Dielektrizitätszahl: $\epsilon_r = \frac{C_{\text{mit}}}{C_{\text{ohne}}} = 1 + \chi_e$
Elektrische Flußdichte (siehe auch Gauß'scher Satz, Gl. 10.4):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E} + \chi_e\epsilon_0\mathbf{E}$$

Feldenergiedichte im Dielektrikum: $w = \frac{1}{2}\mathbf{DE}$
Frequenzabhängigkeit der Polarisierbarkeit (γ: Dämpfung):

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\epsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \ \mathbf{p} = \epsilon_0\alpha\mathbf{E}$$

Plasmafrequenz: $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \Rightarrow \epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$
Orientierungspolarisation permanenter Dipole:

$$\mathbf{P} = \frac{np^2\mathbf{E}}{3k_BT} \Rightarrow \chi = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{np^2}{3\epsilon_0 k_B T}$$

10.7 Clausius-Mossotti-Beziehung

Zusammenhang zwischen χ_e und α:

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1-\frac{1}{3}n\alpha} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{1+\frac{2}{3}n\alpha}{1-\frac{1}{3}n\alpha}$$

10.8 Elektrischer Strom

Widerstand ($\mathbf{j}$ Stromdichte, ϱ spez. Widerstand, σ spez. Leitfähigkeit):

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\varrho} = \sigma\mathbf{E} \Rightarrow R = \varrho\frac{l}{A}$$

$$[\mathbf{j}] = \frac{A}{m^2}, \quad [\varrho] = \frac{Vm}{A} = \Omega m$$

Leistungsdichte: $\frac{P}{V} = \mathbf{Ej} = \varrho\mathbf{j}^2 = \frac{\mathbf{E}^2}{\varrho}$
Kirchhoff'sche Gesetze:

- *Knotenregel*: An einem Punkt ist die Summe aller zu- und wegfließenden Ströme gleich null.
- *Maschenregel*: Entlang einer geschlossenen Masche ist die Summe aller Potentialänderungen gleich null.

Auf- und Entladung eines Kondensators:

$$\text{Aufladung: } U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$
$$\text{Entladung: } U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Mikrosop. Modell für das ohmsche Gesetz (τ freie Flugzeit):

$$\text{Driftgeschwindigkeit: } \mathbf{v}_D = -\frac{e\mathbf{E}}{m}\tau$$
$$\text{Leitfähigkeit: } \sigma = \frac{1}{\varrho} = \frac{e^2N\tau}{mV} = \frac{e^2n\tau}{m}$$
$$\text{Beweglichkeit: } \mu = \frac{v_D}{E} = -\frac{e\tau}{m} = -\frac{\sigma}{ne}$$

Faraday Konstante: $F = N_A e = 96484{,}56\ C$
Richardson-Gleichung (Zahl der austretenden e^- pro Sekunde und Fläche):

$$j_s = CT^2 e^{-\frac{\Phi}{k_b T}}$$

11. Magnetostatik

11.1 Spezielle Felder

unendlich langer, gerade Leiter (äußeres Feld): $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
lange Spule (innerhalb der Spule): $B = \mu_0 I\frac{N}{l}$
Koaxialleiter (zwischen den beiden Leitern): $\mathrm{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Luftspalt d in Spule mit Umfang $\approx l$: $B = \frac{\mu_0 IN}{d + l/\mu_r}$

11.2 Gesetz von Biot-Savart

Beschreibt die durch das Leiterelement $d\mathbf{l}$ (in Richtung von $\mathbf{I}$) am Ort $\mathbf{r}$ differentielle Magnetfeldänderung:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}d\mathbf{l}\times\mathbf{r}$$

11.3 Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = Q\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

Zyklotronfrequenz (Kreisfrequenz einer Ladung im B-Feld):

$$\vec{\omega}_Z = -\frac{\mathbf{B}Q}{m}$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter: $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l}\times\mathbf{B}$

11.4 Hall-Effekt

$$U_H = R_H\frac{BI}{d}$$

d: Länge Sonde in Feldrichtung, $R_H = \frac{1}{nQ}$: Hallkonst.

11.5 Magnetische Dipole

Dipolmoment (P: Polstärke): $\mathbf{m} = I\mathbf{A}$ ($= Pl$)
Fernfeld: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{rm})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right]$
Drehmoment auf Dipol (homogenes Feld): $\mathbf{M} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}$
Kraft auf Dipol (inhomogenes Feld): $\mathbf{F} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}(\mathbf{r})$
Kraft durch Polstärke: $\mathbf{F} = P\mathbf{B} \to F = \frac{\mu_0 P^2}{4\pi r^2}$
Potentielle Energie: $E_{pot} = -\mathbf{mB}$
Kraft zwischen zwei Dipolen ($\mathbf{m}_1||\mathbf{m}_2$): $F(x) = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{m^2}{x^4}$

11.6 Materie im magnetischen Feld

Magnetisierung (n: Dipoldichte): $\mathbf{M} = n\mathbf{m}$
Ampèresches Gesetz bei Magnetisierung:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) \quad \to \quad \oint(\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M})d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

Magnetische Suzeptibilität:

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} \quad \to \quad \mathbf{B} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}$$

Diamagnetismus ($\chi_m < 0$): $\chi_m = -\frac{\mu_0 nZe^2}{2m}\overline{x^2}$
Paramagnetismus ($\chi_m > 0$): $\chi_m = \frac{\mu_0}{3}\frac{nm^2}{k_bT}$

Magnetische Stoffe:

- Ferromagnetismus: parallele Ausrichtung der $\mathbf{m}$
- Antiferromagnetismus: antiparallele Ausrichung
- Ferrimagnetismus: antiparallele Ausrichung ungleicher Momente

11.7 Zusammenfassung und Vergleich

Einheiten:

$E : \frac{V}{m}$	$D : \frac{As}{m^2}$	$U : [V]$	$q : [As]$	$p : [Asm]$
$H : \frac{A}{m}$	$B : \frac{Vs}{m^2}$	$I : [A]$	$\mu_0 P : [Vs]$	$\mu_0 m : [Vsm]$

Maxwell:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} \quad \nabla\mathbf{D} = \varrho \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad \nabla\mathbf{B} = 0 \quad \nabla\times\mathbf{H} = +\frac{d}{dt}\mathbf{D} + \mathbf{j}$$

mit Materie:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon_0(1+\chi_{el})\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$$

11.8 Feldübergang an einer Grenzfläche

$B_{1\perp} = B_{2\perp},\ H_{1\perp}\mu_1 = H_{2\perp}\mu_2,\ D_{1\perp} = D_{2\perp},\ E_{1\perp}\epsilon_1 = E_{2\perp}\epsilon_2$
$H_{1||} = H_{2||},\ B_{1||}\mu_2 = B_{2||}\mu_1,\ E_{1||} = E_{2||},\ D_{1||}\epsilon_2 = D_{2||}\epsilon_1$

12. Zeitlich veränderliche Magnetfelder

12.1 Induktion

Induzierte Spannung: $U_{\text{ind}} = \oint_{\partial F}\mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\dot{\phi}$
Spannungsstoß: $\int U\,dt = -\mathbf{AB}$
Selbstinduktion: $U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$
Selbstinduktion einer langen Spule: $L = \mu A\frac{N^2}{l}$
Selbstinduktion eines Koaxialkabels: $L = \mu\frac{l}{2\pi}\ln\frac{R}{r}$
Einschalt- und Ausschaltvorgang bei Spule:

$$\text{Einschalten: } I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$
$$\text{Ausschalten: } I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Wechselstromgenerator: $U_{\text{ind}} = NBA\omega\sin(\omega T)$

12.2 Energie des magnetischen Feldes

Energiedichte allgemein: $dw = \frac{dW}{V} = HdB$
Integriert für $\mu = $ const: $w_{\text{magn.}} = \frac{\mu}{2}H^2 = \frac{B^2}{2\mu}$
Durch Induktivität gespeicherte Energie: $W = \frac{1}{2}LI^2$

12.3 Transformator

Spannungsverhältnis: $U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1$
Strom an Primärseite (R: Last an Sekundärseite):

$$I = \frac{U_0}{\omega L_1}\sin(\omega t) + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\frac{U_0}{R}\cos(\omega t)$$

Gemittelte Leistungsabgabe: $\overline{P} = \frac{1}{2}\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\frac{U_0^2}{R}$

12.4 Supraleitung

Abnahme eines Dauerstromes in Ringleitung: $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$
Flußquantisierung (q: Ladung eines Ladungsträgers):

$$\phi_0 = \frac{h}{q} \quad h = 6{,}626176\cdot 10^{-34}Js$$

Kritisches Magnetfeld: $B_C(T) \approx B_{C_0}\left(1 - \frac{T^2}{T_C^2}\right)$
Supraleiter ist perfekter Diamagnet $\Rightarrow \chi_m = -1$
London Gleichung (n_s: Sättigungsteilchendichte der spuraleitenden e^-):

$$\nabla\times\mathbf{j} + \frac{n_s e^2}{m}\mathbf{B} = 0$$

London'sche Eindringtiefe (magn. Feld): $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$

13. Wechselstromkreis

13.1 Strom, Spannung und ohmscher Widerstand

Effektivwerte:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0, \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0$$

Leistung bei reinem ohmschen Widerstand:

$$P(t) = \frac{U_0^2}{R}\cos^2(\omega t) \Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}$$

13.2 Induktivität und Kapazität

Induktiver Widerstand (Strom hinkt hinterher):

$$X_L = \omega L$$

Kapazitiver Widerstand (Strom eilt der Spannung voraus):

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Leitwert Y: Jeweils der Kehrwert von X_L und X_C.
Impedanz (komplexer Gesamtwiderstand):

$$X = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Phasenverschiebung:

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \Rightarrow I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$$

13.3 Schwingkreis (Reihenschaltung)

Eigenfrequenz des (un)gedämpften Schwingkreises:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

DGL ($\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\tau = \frac{L}{R}$):

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

Erzwungene Schwingungen (mit Winkelgeschwindigkeit ω):

$$|I_0| = \frac{U_0\omega}{L\sqrt{\frac{\omega^2}{\tau^2} + (\omega^2-\omega_0^2)^2}} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\tau}{\omega}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right)$$

14. Elektromagnetische Wellen

14.1 Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen

Wellengleichung:

$$\ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}\nabla^2\mathbf{E} \quad \ddot{\mathbf{B}} = \frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}\nabla^2\mathbf{B}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

14.2 Monochromatische Wellen

Lösung der Wellengleichung (($\mathbf{E}\perp\mathbf{B}$) $\perp\mathbf{k}$):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}$$

Wellenlänge und Winkelgeschwindigkeit:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \omega = \frac{c}{n}k$$

Zusammenhang zwischen E- und B-Feld:

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \omega\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \Rightarrow B = \frac{n}{c}E = \sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r}E$$

14.3 Energie, Poynting, Impuls

Energiedichte im Vakuum:

$$u(t) = \frac{1}{2}(ED+HB) = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0} \Rightarrow \overline{u} = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2$$

Poynting Vektor (Energiefluß):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \Rightarrow S = cu \qquad [S] = \frac{W}{m^2}$$

Impulsdichte $\mathbf{j}_S$ und Drehimpulsdichte $\mathbf{l}_S$:

$$\mathbf{j}_S = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad \mathbf{l}_S = \frac{u}{\omega^2}\vec{\omega}$$

14.4 Strahlung des Hertz'schen Dipols

Felder in Polarkoordinaten (p: Dipolmoment):

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})\sin(\theta)}{c^2 r} \quad B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{p}(t-\frac{r}{c})\sin(\theta)}{cr}$$

Poynting Vektor für diese Felder zeitlich gemittelt:

$$\overline{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3 r^2}\sin^2(\theta)$$

Abgestrahlte Leistung:

$$\overline{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_0^2\omega^4}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\overline{p^2}\omega^4}{3c^3}$$

14.5 Brechung, Dispersion und Reflexion

Brechung (Snellius'sches Brechungsgesetz):

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalreflexion (beim Übergang von n_{dicht} zu $n_{\text{dünn}}$):

$$\sin(\alpha_T) = \frac{n_{\text{dünn}}}{n_{\text{dicht}}}$$

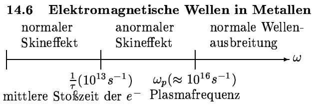
Modell für Brechzahl (ϱ: Elektronendichte, α: vgl. (10.6)):

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \varrho\alpha(\omega)}$$

Phasengeschwindigkeit: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$
Gruppengeschwindigkeit (vgl. (8.6)): $v_g = \frac{v}{1 + kv/n\ dn/d\omega}$
normale Dispersion: $v_g < v \to \frac{dn}{d\omega}, \frac{d\epsilon_r}{d\omega} > 0$
anormale Dispersion: $v_g > v \to \frac{dn}{d\omega}, \frac{d\epsilon_r}{d\omega} < 0$
Reflexionskoeffizient bei senkrechtem Einfall:

$$r = \frac{S_R}{S_E} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

14.6 Elektromagnetische Wellen in Metallen



Normaler Skineffekt Formal wird ϵ_r ersetzt durch $\epsilon_r + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$ Komplexe Brechzahl:

$$n = \sqrt{i\frac{\sigma\mu_r}{\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma\mu_r}{2\omega\epsilon_0}} + i\sqrt{\frac{\sigma\mu_r}{2\omega\epsilon_0}} =: n_r + i\kappa$$

Komplexer Wellenvektor:

$$k = n\frac{\omega}{c} = n_r\frac{\omega}{c} + i\kappa\frac{\omega}{c}$$

Eindringtiefe in Metall ($\mathbf{E}\sim e^{-\frac{x}{d}}$):

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} = c\sqrt{\frac{2\epsilon_o}{\sigma\omega}}$$

Anormaler Skineffekt ϵ_r wird durch ϵ_r des Plasmas $\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ersetzt Komplexe Brechzahl:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx i\frac{\omega_p}{\omega} \approx i\kappa$$

Eindringtiefe (in erster Näherung frequenzunabhängig, bewirkt Totalreflexion):

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} = \frac{c}{\omega_p} = \frac{c}{e}\sqrt{\frac{\epsilon_0 m_e}{\varrho}}$$

Normale Wellenausbreitung reelle Brechzahl $\Rightarrow$ Metall wird durchsichtig Brechzahl:

$$\omega > \omega_p \quad n = 1 + \frac{\varrho e^2}{2m\epsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)}$$
$$\omega \gg \omega_p \quad n = 1 - \frac{\varrho e^2}{2m\epsilon_0\omega^2}$$

14.7 Wellenleitung

Telegraphengleichung für Koaxialkabel:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit: $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{n}$
Hohlleiter (a_1, a_2: Abmessungen; für $\omega > \pi c\sqrt{a_1^{-2} + a_2^{-2}}$):

$$v = \frac{\omega}{k} = c\left(1 - c^2\pi^2\omega^{-2}(n_1^2 a_1^{-2} + n_2^2 a_2^{-2})\right)^{-\frac{1}{2}}$$

14.8 Streuung und Polarisation

An Atom mittlere abgestrahlte Leistung (ω_0: Eigenfrequenz des Atoms):

$$< P > = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2\omega^4}{3c^3}\frac{|E_0|^2 e^2}{2m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

Daraus resultierender Wirkungsquerschnitt ($\sigma_{\ th}$: Thomson-Wirkungsquers.):

$$\sigma = \frac{< P >}{< S >} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2}\frac{e^2}{c^4 m^2}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

$$\sigma_{\text{th}} \approx 0{,}67\cdot 10^{-24}\text{cm}^2 \Rightarrow \sigma = \sigma_{\text{th}}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

Folge: $\sigma\sim\omega^4\sim\lambda^{-4} \to$ Blaues Licht wird stärker gestreut als rotes.
Abnahme der Intensität durch Streuung:

$$< S(x) > = < S_0 > e^{-n\sigma x}$$

Polarisation: Die *Polarisationsrichtung* ist parallel zum el. Feldvektor, die *Polarisationsebene* liegt senkrecht dazu.
Brewsterwinkel (Reflektiertes Licht ist $\perp$ zur Einfallsebene polarisiert):

$$\tan\alpha_B = n$$

14.9 Interferenz und Beugung

Intensität bei Überlagerung zweier Strahlen:

$$A_i = \sum_{i=1}^{2} A_i\cos(k_i r_i - \omega_i t + \varphi_i)$$
$$< A^2 > = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 < \cos(k_2 r_2 - k_1 r_1 - (\omega_2-\omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1) >$$

Intensitätsmaxima bei verschiedenen Gittern:

- Doppelspalt (jeweils schmal): $g\sin(\alpha_n) = n\lambda$
- Einfacher Spalt: $b\sin(\alpha_n) = (n + \frac{1}{2})\lambda$
- Gitter: $g\sin(\alpha_n) = n\lambda$, bzw. $g(\sin(\alpha_n) - \sin(\beta)) = n\lambda$
- Lochblende (Min.): $\sin(\alpha_z) = \frac{z\lambda}{2R}$, $z = 1.22, 2.24, 3.24, \ldots$

Auflösungsvermögen Gitter: $A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n\cdot N$
Beugung am allg. Gitter (b: Spaltbreite, g: Abstand, N: Anzahl Spalte):

$$I = A_0^2\left(\frac{1}{X}\sin(X)\right)^2\left(\frac{\sin(NY)}{\sin(Y)}\right)^2$$
$$\text{wobei } X = \frac{\pi b}{\lambda}\sin(\alpha), \quad Y = \frac{\pi g}{\lambda}\sin(\alpha)$$

Die Intensität der Maxima ist proportional zu N^2 und das erste Minimum kommt nach $\Delta(\sin\alpha) = \frac{\lambda}{Ng}$.
Bragg Bedingung für konstruktive Interferenz am Gitter (d: Abstand der Gitterebenen, θ: Winkel zur Ebene):

$$2\,d\sin(\theta) = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

15. Optik und Strahlung

15.1 Abbildungssysteme

Kugelhohlspiegel ($r < 0$ f. konvexe Spiegel): $f = \frac{r}{2}$
Linsenmacherformel ($r < 0$ für konkave Linsenhälften):

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Addition von Brennweiten (d: Abstand der Hauptebenen):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

Abbildungsgleichungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}, \quad V = \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f} = \frac{f}{g-f}$$

LWL: $n_0\sin\alpha_0 \le n_K\sqrt{1 - \cos^2\alpha_1} = \sqrt{n_K^2 - n_M^2}$

15.2 Vergrößerung optischer Systeme

Lupe: $v_L = \frac{s_0}{f}$, Mikroskop: $v_M = \frac{t}{f_1}\frac{s_0}{f_2}$, $s_0 = 25cm$, $t \approx 25cm$
Fernrohr: $v_F = vv_L = \frac{f}{s_0}\frac{s_0}{f_2} = \frac{f}{f_2}$

15.3 Auflösungsvermögen

Rayleighsches Kriterium (δ: Öffnungwinkel, D: Blendendurchmesser):

$$\sin\delta \ge 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Auflösung nach Abbe (d: minimaler Abstand zweier Objektpunkte, A: numerische Apertur, α halber Öffnungswinkel, n: Brechzahl, Objekt im Brennpunkt):

$$d = \frac{\lambda}{A}, \quad A = n\sin\alpha$$

15.4 Hohlraumstrahlung

Planck-Gesetz (Energiedichte bei Freq. ν und Temp. T):

$$\varrho(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/(k_BT)} - 1}d\nu$$

Wien-Verschiebungsgesetz (Maximum der Strahlungsdichte):

$$\nu_m = \frac{2{,}82k_B}{h}T = 5{,}88\cdot 10^{10}\frac{Hz}{K}T$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz (gesamte abgestrahlte Leistung pro Fläche):

$$R(T) = \frac{4\pi^5}{15}\frac{k_B^4}{c^2h^3}T^4 = 11{,}34\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}T^4$$

Abgestrahlte Leistung nach einer Seite (σ: Stefan-Boltzmann-Konstante):

$$P = \sigma AT^4 \qquad \sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}$$

16. Praktisches

16.1 Einheiten

$\epsilon_0 : \frac{As}{Vm},\ \mu_0 : \frac{Vs}{Am},\ j : \frac{A}{m^2},\ \varrho : \frac{Vm}{A},\ E : \frac{V}{m},\ H : \frac{A}{m},\ D : \frac{As}{m^2}$
$B : \frac{Vs}{m^2} = T,\ S : \frac{W}{m^2},\ L : \frac{Vs}{A} = H,\ \phi : Vs = Wb,\ h : Js$

16.2 Lorenztransformation

$\beta := \sqrt{1 - v^2/c^2},\ x' = (x - vt)/\beta,\ t' = (t - \frac{v}{c^2}x)/\beta$
$L = \beta L_0,\ d\tau = \beta dt,$ Geschw.add. $x = \frac{u+v}{1+uv/c^2}t$

16.3 Umrechnungen

$n = \frac{m}{M},\ \frac{k_B}{m} = \frac{R}{M},\ \frac{N}{V} = \frac{p}{k_BT},\ V_m = \frac{M}{\varrho} = \frac{RT}{p},\ \lambda = \frac{h}{p}$

16.4 Fundamentalkonstanten (5. Stelle gerundet)

c_0	$2{,}99792\cdot 10^8$ m/s	m_E	$9{,}10938\cdot 10^{-31}$ kg
μ_0	$12{,}56637\cdot 10^{-7}$ N/A^2	m_P	$1{,}67262\cdot 10^{-27}$ kg
ϵ_0	$8{,}85419\cdot 10^{-12}$ F/m	m_N	$1{,}67493\cdot 10^{-27}$ kg
G	$6{,}673\cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}	N_A	$6{,}02214\cdot 10^{23}$ mol^{-1}
h	$6{,}62607\cdot 10^{-34}$ Js	R	$8{,}31447$ J/(mol K)
e	$1{,}60218\cdot 10^{-19}$ C	k_B	$1{,}38065\cdot 10^{-23}$ J/K